“SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH”

Nguyễn Nghi
GV Phan Bội Châu

Thông thường đứng trước bài toán giải phương trình, hệ phương trình hay bất phương trình học sinh nghỉ ngay đến dạng mẫu đã học, phương pháp cộng, phương pháp thế hay phương pháp đặt ẩn phụ để giải, nhưng thực tế qua các đề thi đại học, cao đẳng thi học sinh giỏi toán bảng B vừa qua học sinh còn gặp những dạng phức tạp mà để giải nó đòi hỏi phải có những nhận xét đặc biệt. Một trong những nhận xét đặc biệt đó là dựa trên tính đơn điệu của hàm số ta có thể tìm được nghiệm phương trình, hệ phương trình, bất phương trình

NỘI DUNG

<u>1.1/ Lịch sử của vấn đề nghiên cứu:</u> Vấn đề áp dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình, hệ phương trình hay bất phương trình người ta dùng từ lâu, nhưng trong sách giáo khoa ít có bài toán áp dụng cách giải này, cho nên học sinh không quen dùng và kỷ năng dùng chưa được tốt.

<u>1.2/ Cơ sở lý luận:</u>

Định lí 1: Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên D thì số nghiệm của phương trình $f(x) = k$ (k là số không đổi) trên D không nhiều hơn một nghiệm và $f(x) = f(y)$ khi và chỉ khi $x = y$ với mọi x, y thuộc D.

Chứng minh:

Giả sử phương trình $f(x) = k$ có nghiệm $x = a$, tức là $f(a) = k$. Do f(x) đồng biến nên

* $x > a$ suy ra $f(x) > f(a) = k$ nên phương trình $f(x) = k$ vô nghiệm
* $x < a$ suy ra $f(x) < f(a) = k$ nên phương trình $f(x) = k$ vô nghiệm

Vậy pt $f(x) = k$ có nhiều nhất là một nghiệm.

Chú ý:* Từ định lí trên, ta có thể áp dụng vào giải phương trình như sau:

Bài toán yêu cầu giải pt: $F(x) = 0$. Ta thực hiện các phép biến đổi tương đương đưa phương trình về dạng $f(x) = k$ hoặc $f(u) = f(v)$ (trong đó $u = u(x)$, $v = v(x)$) và ta chứng minh được f(x) là hàm luôn đồng biến (nghịch biến)

Nếu là pt: $f(x) = k$ thì ta tìm một nghiệm, rồi chứng minh đó là nghiệm duy nhất.

Nếu là pt: $f(u) = f(v)$ ta có ngay $u = v$ giải phương trình này ta tìm được nghiệm.

* Ta cũng có thể áp dụng định lí trên cho bài toán chứng minh phương trình có duy nhất nghiệm.

Định lí 2: Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và hàm số $y = g(x)$ luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) và liên tục trên D thì số nghiệm trên D của phương trình: $f(x) = g(x)$ không nhiều hơn một.

Chứng minh:

Giả sử $x = a$ là một nghiệm của phương trình: $f(x) = g(x)$, tức là $f(a) = g(a)$. Ta giả sử f(x) đồng biến còn g(x) nghịch biến.

*Nếu $x > a$ suy ra $f(x) > f(a) = g(a) > g(x)$ dẫn đến phương trình $f(x) = g(x)$ vô nghiệm khi $x > a$.

*Nếu $x < a$ suy ra $f(x) < f(a) = g(a) < g(x)$ dẫn đến phương trình $f(x) = g(x)$ vô nghiệm khi $x < a$.

Vậy pt f(x) = g(x) có nhiều nhất một nghiệm.

Chú ý: Khi gặp phương trình F(x)=0 và ta có thể biến đổi về dạng f(x)=g(x), trong đó f(x) và g(x) khác tính đơn điệu. Khi đó ta tìm một nghiệm của phương trình và chứng minh đó là nghiệm duy nhất.

Nhận xét:

+ Nếu hàm số f(t) đồng biến trên tập D, thì f(x) > f(y) ⇔ x > y (với x, y thuộc D)

+ Nếu hàm số f(t) nghịch biến trên tập D, thì f(x) > f(y) ⇔ x < y (với x, y thuộc D)

1.3/ Nhận định, đánh giá:

- Nhận định: Nhiệm vụ của Giáo viên là phải truyền thụ cho được một số phương pháp giải toán hay, vừa sức, mà học sinh ít gặp trong sách giáo khoa để kích thích sự tìm tòi, tư duy cho học sinh.

- Đánh giá: Đây là một phương pháp giải toán vừa sức đối với học sinh, học sinh lĩnh hội không khó khăn, cho nên các đề thi thỉnh thoảng ra với cách giải đơn giản là áp dụng phương pháp này.

1.4/ Khẳng định sự cần thiết: Đối với học sinh tham gia các kỳ thi đại học hoặc thi học sinh giỏi toán bảng B thì đây là một phương pháp giải, cần phải biết.

Chương 2: Thực trạng của vấn đề:

Đây là một áp dụng hay, vừa sức đối với học sinh nhưng học sinh không quen sử dụng nên gặp khó khăn khi đứng trước bài toán dạng này

Chương 3: Các biện pháp

3.1/ Cơ sở xác lập biện pháp:

Tôi phân chia các dạng áp dụng của từng đơn vị kiến thức như sau:

A- VỀ PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

$1/\ \sqrt{x+3}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}=4$ $\quad$ $2/\ \sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}=4-x$

$3/\ \sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2+1}+\sqrt[3]{2x^2}$ $\quad$ $4/\ \log_3\left(\dfrac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5}\right)=x^2+3x+2$

Lời giải:

1) Với phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}=4$ này nếu giải theo cách bình thường như bình phương hay đặt ẩn phụ sẽ gặp nhiều khó khăn. Tuy nhiên, nếu tinh ý một chút ta sẽ thấy ngay VT là một hàm đồng biến và x =1 là một nghiệm của phương trình nên theo định lí 1 ta có được x=1 là nghiệm duy nhất.

Vậy ta có cách giải như sau.

TXĐ: $D=\left[\dfrac{7-\sqrt{57}}{2};+\infty\right)$

Xét hàm số f(x) = $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}$

Ta có f(x) là hàm số liên tục trên D và f'(x) = $\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}+\dfrac{1+\dfrac{7}{2\sqrt{7x+2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}}>0,\forall x\in D$ nên hàm số f(x) luôn đồng biến.

Mặt khác, ta thấy f(1) = 4

*Nếu $x \in D$ và x > 1 suy ra f(x) > f(1) = 4 nên phương trình vô nghiệm

*Nếu $x \in D$ và x < 1 suy ra f(x) < f(1) = 4 nên phương trình vô nghiệm

Vậy x=1 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Chú ý:

* Vì các hàm số y = ax + b với a > 0 là một hàm đồng biến và nếu f(x) là hàm đồng biến thì hàm $\sqrt[n]{f(x)}$ (với điều kiện căn thức tồn tại) cũng là một hàm đồng biến nên ta dễ dàng nhận ra VT của phương trình là hàm đồng biến.

* Khi dự đoán nghiệm thì ta ưu tiên những giá trị của x sao cho các biểu thức dưới dấu căn nhận giá trị là số chính phương.

2) Với phương trình $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}=4-x$ này cũng vậy nếu dùng phép biến đổi tương đương hay đặt ẩn phụ sẽ gặp khó khăn và theo chú ý trên ta cũng dễ dàng nhận thấy VT của phương trình là một hàm đồng biến và phương trình có nghiệm x=1. Do đó phương trình này có nghiệm duy nhất x=1 (Cách giải tương tự như bài 1).

3) Với đường lối như hai bài trên thì ta khó khăn để giải quyết được phương trình $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2+1}+\sqrt[3]{2x^2}$ này. Tuy nhiên nếu nhìn kĩ thì ta thấy các biểu thức dưới dấu căn ở hai vế có chung một mối liên hệ là x+2=(x+1)+1 và $2x^2+1=(2x^2)+1$, do vậy nếu đặt u = x + 1 và v = $2x^2$ thì phương trình đã cho trở thành $\sqrt[3]{u+1}+\sqrt[3]{u}=\sqrt[3]{v+1}+\sqrt[3]{v}$ $\Leftrightarrow$ f(u) = f(v) với f(t) = $\sqrt[3]{t+1}+\sqrt[3]{t}$ là hàm số liên tục trên R và có f'(t) = $\frac{1}{3\sqrt[3]{(t+1)^2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}>0, \forall t\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ nên f(t) luôn đồng biến trên R. Do đó f(u) = f(v) $\Leftrightarrow$ u = v $\Leftrightarrow$ x + 1 = $2x^2$ $\Leftrightarrow$ x = 1, x = $-\frac{1}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm x = 1, x = $-\frac{1}{2}$

4) Phương trình: $\log_3\left(\frac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5}\right)=x^2+3x+2$

TXĐ: D = R

Nhận xét các biểu thức tham gia trong phương trình ta thấy

$(2x^2+4x+5)-(x^2+x+3)=x^2+3x+2$

Do vậy, nếu đặt $u = x^2 + x + 3$, $v = 2x^2 + 4x + 5$ (u,v > 0) thì $v - u = x^2 + 3x + 2$,

khi đó phương trình trở thành: $\log_3\left(\frac{u}{v}\right)=v-u\Leftrightarrow \log_3 u+u=\log_3 v+v\Leftrightarrow f(u)=f(v)$

Trong đó $f(t) = \log_3 t + t$ với t > 0

Ta thấy f(t) là hàm liên tục và đồng biến, do vậy

$f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x=-1, x=-2$

Vậy phương trình có nghiệm x = -1, x = -2

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

1/ $3^x + 4^x = 5^x$

2/ $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{5}\right)^x$

3/ $9^x + 2(x - 2)3^x + 2x - 5 = 0$.

Lời giải:

1) Với phương trình trên rất khó để ta sử dụng các phương pháp giải phương trình mũ để giải. Tuy nhiên với phương trình (1) ta dễ dàng đoán được một nghiệm của phương trình là x =2. Ta chứng minh x = 2 là nghiệm duy nhất cúa phương trình.

Thật vậy, phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$

Vì hàm số mũ với cơ số dương và nhỏ hơn 1 là hàm nghịch biến nên đặt

f(x) = $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ là hàm số nghịch biến, còn vế phải là hàm hằng.

Do đó nghiệm x = 2 là nghiệm duy nhất.

2) Tuy nhiên, với pt $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x + \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x = \left(\sqrt{5}\right)^x$ (2) thì không dễ để ta đoán được nghiệm của pt (2) vì nó vô nghiệm.

Ở đây ta để ý rằng $\sqrt{3}+\sqrt{2} > \sqrt{5}$ > 1 và 0 < $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ < 1

Do vậy, khi x > 0 ta có $\begin{cases} \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x > \left(\sqrt{5}\right)^x \\ \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x > 0 \end{cases} \Rightarrow VT > VP$: Do đó phtrình không có nghiệm

$x \in (0;+\infty)$

khi x < 0 ta có $\begin{cases} \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x > 1 > \left(\sqrt{5}\right)^x \\ \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x > 0 \end{cases} \Rightarrow VT > VP$: Do đó phtrình không có nghiệm

$x \in (-\infty;0)$

Với x = 0, rõ ràng không thỏa mãn.

Vậy pt (2) vô nghiệm.

Từ hai phương trình trên ta có thể tổng quát:

Cho phương trình $a^x + b^x = c^x$ (*), với a,b,c đều dương khác 1

Khi đó: Nếu a < b < c hoặc a > b > c thì pt (*) có nghiệm duy nhất

Nếu a < c < b thì pt (*) vô nghiệm

3) Phương trình $9^x + 2(x - 2)3^x + 2x – 5 = 0$

Đặt $3^x = t > 0$, phương trình trở thành: $t^2 + 2(x - 2)t + 2x–5 = 0 \Leftrightarrow t = -1$(loại), t = 5-2x

Với t = 5 – 2x ta có $3^x = 5 – 2x$

Nhận thấy x = 1 là một nghiệm của phương trình.

Vế trái là hàm số đồng biến còn vế phải là hàm nghịch biến.

Do đó x = 1 là nghiệm duy nhất.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $2^{2^x} + 3^{2^x} = 2^x + 3^{x+1} + x + 1$

Giải: Ta có phương trình $\Leftrightarrow 2^{2^x} + 3^{2^x} + 2^x = 2^{x+1} + 3^{x+1} + x + 1$ (1)

Nếu đặt u = 2^x và v = x + 1 thì phương trình (1) trở thành $2^u + 3^u + u = 2^v + 3^v + v \Leftrightarrow$ f(u) = f(v). Trong đó $f(t) = 2^t + 3^t + t$ liên tục và đồng biến trong R. Do đó f(u) = f(v) $\Leftrightarrow$ u = v ta được phương trình $2^x = x + 1$

Cách 1: Ta có $2^x = x + 1 \Leftrightarrow 2^x – x = 1$

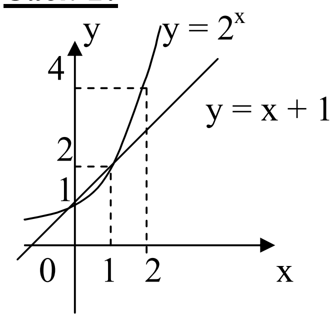
Đặt $g(x) = 2^x – x$. Ta có $g'(x) = 2^x. \ln 2 – 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\log_2(\ln 2) \approx 0,53$

Ta có:

+ g'(x) > 0, $\forall x \in \left(-\log_2(\ln 2);+\infty\right)$ => Hàm số g(x) đồng biến trong khoảng

$\left(-\log_2(\ln 2);+\infty\right)$ => Phương trình g(x) = 1 có một nghiệm duy nhất
x = $1\in\left(-\log_2(\ln 2);+\infty\right)$
+ g'(x) < 0, $\forall x\in\left(-\infty;-\log_2(\ln 2)\right)$=> Hàm số g(x) nghịch biến trong khoảng
$\left(-\infty;-\log_2(\ln 2)\right)$=> Phương trình g(x) = 1 có một nghiệm duy nhất
x = $0\in\left(-\infty;-\log_2(\ln 2)\right)$
Vậy phương trình có hai nghiệm: x = 0, x = 1

Cách 2:



Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng y = x + 1 và đường cong y = 2^x chỉ cắt nhau tại 2 điểm (0; 1) và (1; 2) nên phương trình 2^x = x + 1 có đúng hai nghiệm là x = 0 và x = 1
Vậy phương trình có 2 nghiệm: x = 0, x = 1

Ví dụ 4: Giải phương trình $2^{\sqrt{3-x}}=-x^2+8x-14$ (1)

Giải:

Điều kiện: x $\le$ 3
Đặt f(x) = $2^{\sqrt{3-x}}$, g(x) = $-x^2+8x-14$
Ta có f'(x) = $\dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}}2^{\sqrt{3-x}}\ln 2<0$, $\forall x\in$(-∞; 3) => Hàm số f nghịch biến trên (-∞; 3]
Ta có g'(x) = -2x + 8 > 0, $\forall x\in$(-∞; 3] => Hàm số g đồng biến trên (-∞; 3]
Mặt khác f(3) = g(3) = 1, nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất x = 3

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\log_2\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_3 x$ (1)

Giải:

Điều kiện x > 0
Đặt t = $\log_3$x ⇔ x = 3^t. Khi đó (1) trở thành

$$\log_2\left(1+\sqrt{3^t}\right)=t\Leftrightarrow 1+\sqrt{3^t}=2^t\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^t+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t=1\,(2)$$

Vì hàm số f(t) = $\left(\frac{1}{2}\right)^t+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t$ nghịch biến trên R và f(2) = 1. Vậy (2) có nghiệm duy nhất t = 2. Suy ra (1) có nghiệm duy nhất x = 9

Ví dụ 6: Giải phương trình: $4(x-2)\left[\log_2(x-3)+\log_3(x-2)\right]=15(x+1)$ (1)

Giải:

Điều kiện x > 3
Phương trình (1) $\Leftrightarrow \log_2(x-3)+\log_3(x-2)=\dfrac{15(x+1)}{4(x-2)}$
Ta thấy f(x) = $\log_2(x-3)+\log_3(x-2)$ là hàm số đồng biến trên khoảng (3; +∞)

Và hàm số g(x) = $\frac{15(x+1)}{4(x-2)}$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$ (Do g'(x) = $\frac{-45}{4(x-2)^2}<0,\ \forall \in (3; +\infty)$)

Ta lại có f(11) = g(11) = 5. Vậy x = 11 là nghiệm duy nhất

Ví dụ 7: Giải phương trình: $x^{\log_2 9} = x^2.3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$ (1)

Giải: Điều kiện x > 0

Với 0 < a ≠ 1 và b > 0, c > 0 ta có $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$

Nên phương trình (1) $\Leftrightarrow 9^{\log_2 x} = x^2.3^{\log_2 x} - 3^{\log_2 x} \Leftrightarrow 3^{\log_2 x} = x^2 - 1 (2)$ (Do $3^{\log_2 x} > 0$)

Đặt t = $\log_2 x \Leftrightarrow x = 2^t$, khi đó phương trình (2) trở thành $3^t = 4^t - 1$

$\Leftrightarrow f(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t = 1 (3)$

Vì f(t) là hàm số nghịch biến trên R và f(1) = 1, nên (3) có nghiệm duy nhất t = 1, suy ra x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình (1)

Ví dụ 8: Giải phương trình: $e^x = 1 + \ln(1 + x)$

Giải:

Điều kiện x > -1

Đặt y = ln(1 + x) ⇔ $e^y = 1 + x$

Kết hợp với phương trình đã cho ta được hệ phương trình: $\begin{cases} e^x = 1 + y \ (1) \\ e^y = 1 + x \ (2) \end{cases}$

Lấy (1) – (2) ta được: $e^x - e^y = y - x \Leftrightarrow e^x + x = e^y + y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ (3)

Trong đó $f(t) = e^t + t$

Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0$. với mọi t => Hàm số f(t) đồng biền trên R. Do đó (3) ⇔ x = y

Vậy (1) ⇔ $e^x = 1 + x \Leftrightarrow e^x - x = 1 (4)$

Ta thấy x = 0 là một nghiệm của (4), ta chứng minh x = 0 là nghiệm duy nhất của (4)

Xét hàm số $g(x) = e^x - x$, với x > -1

Ta có $g'(x) = e^x - 1$, g'(x) = 0 ⇔ x = 0

+ Nếu – 1 < x < 0 thì g'(x) < 0 => Hàm số g(x) giảm trên nửa khoảng (-1, 0] nên g(x) > g(0) = 1, $\forall x \in (-1; 0)$ => Phương trình (4) không có nghiệm x $\in (-1; 0)$

+ Nếu x > 0 thì g'(x) > 0 => Hàm số g(x) tăng trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ nên g(x) > g(0) = 1, $\forall x \in (0; +\infty)$ => Phương trình (4) không có nghiệm x $\in (0; +\infty)$

Suy ra phương trình (4) có nghiệm duy nhất x = 0

Vậy phương trình có nghiệm x = 0

Ví dụ 9: Chứng minh rằng phương trình: $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất.

Giải:

Để chứng minh phương trình f(x) = 0 có nghiệm duy nhất trên D ta có thể tiến hành theo cách sau:

* Chứng minh phương trình f(x) = 0 luôn có nghiệm: Để chứng minh điều này ta cần chứng chứng minh f(x) liên tục trên D và tồn tại hai số a, b sao cho f(a).f(b)< 0

* Tiếp theo ta chứng minh f(x) là hàm luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D.

Trở lại bài toán:

Xét hàm số $f(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1$

Ta có f(x) là hàm liên tục trên R và f(0).f(2) < 0, dẫn đến pt f(x) = 0 luôn có nghiệm

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình f(x) = 0
Khi đó $x_0^5 = x_0^2 + 2x_0 + 1 = (x_0 + 1)^2 \geq 0$, $\forall x_0$
Từ đây ta suy ra được $x_0^5 \geq 0 \Rightarrow x_0 \geq 0 \Rightarrow x_0^5 = (x_0 + 1)^2 \geq 1 \Rightarrow x_0 \geq 1$
Do vậy ta chỉ cần khảo sát f(x) với $x \geq 1$
Ta có $f'(x) = 5x^4 - 2x - 2 = 2x(x^3-1) + 2(x^4 - 1) + x^4 > 0$ nên f(x) là hàm đồng biến trên $[1;+\infty)$.
Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất.

Chú ý:

* Nếu chúng ta khảo sát ngay hàm f(x) thì chúng ta không thể có được f(x) là hàm đồng biến, do vậy ta cần hạn chế miền xác định của x. Điều này ta có được là nhờ vào bản thân của phương trình.
* Để chứng minh phương trình f(x)=0 có nghiệm duy nhất trên D ta còn có cách khác đó là khảo sát hàm f(x) trên D, lập bảng biên thiên và từ bảng biến thiên ta suy ra được đồ thị của hàm f(x) chỉ cắt Ox tại một điểm.

Qua các bài toán trên ta thấy việc ứng dụng tính đơn điệu vào giải một số dạng toán về phương trình tỏ ra hiệu quả và cho lời giải ngắn gọn. Thông qua các ví dụ đó hi vong các em có thêm những kĩ năng giải phương trình và nhận dạng được những dạng phương trình nào có thể dùng đồng biến, nghịch biến.

B/ VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I/ Giải bất phương trình

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

1/ $3\sqrt{3-2x} + \dfrac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x \leq 6$

2/ $\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 6x + 11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$

3/ $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} < 2\sqrt{3} + \sqrt{4-x}$

4/ $\log_7 x > \log_3(2 + \sqrt{x})$

Lời giải:

1) ĐK: $\dfrac{1}{2} < x \leq \dfrac{3}{2}$

Xét hàm số f(x) = $3\sqrt{3-2x} + \dfrac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x$

Ta có f'(x) = $\dfrac{-3}{\sqrt{3-2x}} - \dfrac{5}{(2x-1)\sqrt{2x-1}} - 2 < 0, \forall x \in \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ và hàm số f liên tục trên nửa khoảng $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ => Hàm số f(x) là hàm nghịch biến trên nửa khoảng $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$

Mà f(1) = 6, do đó $f(x) \leq 6 = f(1) \Leftrightarrow x \geq 1$.

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của bpt là: T = $\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$

2) ĐK : $1 \leq x \leq 3$

Bất phương trình tương đương: $\sqrt{x^2 - 2x + 3} + \sqrt{x-1} > \sqrt{3-x} + \sqrt{x^2 - 6x + 11}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{3-x} + \sqrt{(3-x)^2 + 2}$ $\Leftrightarrow$ f(x – 1) > f(3 – x)

Với hàm số $f(t) = \sqrt{t^2+2} + \sqrt{t}$ với $t \geq 0$

Ta có f'(t) = $\frac{t}{\sqrt{t^2+2}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t \in (0;+\infty)$ và f(t) liên tục trên nửa khoảng [0; +∞) => hàm số f đồng biến nửa khoảng [0; +∞).

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với f(x - 1) > f(3 - x) ⇔ x – 1 > 3 – x ⇔ x > 2

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $2 < x \leq 3$.

3) ĐK: $-2 \leq x \leq 4$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x}$

Ta có $f'(x) = \frac{3(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0,\ \forall x \in (-2.4)$ và liên tục trên đoạn [-2; 4]

, do đó f(x) là hàm đồng biến trên đoạn [-2; 4].

Mặt khác: f(1) =$2\sqrt{3}$

Do vậy bpt f(x) < $2\sqrt{3}$ = f(1) ⇔ x < 1.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của bpt là: $-2 \leq x < 1$.

4) ĐK: x > 0. Đặt $\log_7 x = t \Leftrightarrow x = 7^t$

Bất phương trình đã cho trở thành

$t > \log_3\left(2+\sqrt{7^t}\right) \Leftrightarrow 3^t > 2+\sqrt{7^t} \Leftrightarrow 1 > 2\left(\frac{1}{3}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t$ =f(t)

Do f(t) là hàm nghịch biến trên R , f(2) = 1.

Nên bất phương trình f(t) < f(2) ⇔ t >2 hay $\log_7 x > 2 \Leftrightarrow x > 49$.

C/ VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} e^x - e^y = (\log_2 y - \log_2 x)(xy+1) \ (1) \\ x^2 + y^2 = 1 \ \ (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện x > 0 và y > 0

Vì hàm số y = e^t, y = ln t đều đồng biến trên tập xác định của nó, nên:

+ Nếu x > y > 0 thì $e^x > e^y$ => VT = $e^x - e^y > 0$ và lnx > lny => VP = lny – lnx < 0

Suy ra (1) có VT > VP => (1) không đúng khi x > y

+ Nếu 0 < x < y thì tường tự (1) có VT < VP => (1) không đúng khi x < y

+ Nếu x = y > 0 thì (1) có VT = VP = 0 =>(1) đúng khi x = y > 0 (3)

Từ (2) và (3) giải ta được nghiệm hệ phương trình là x = y = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_5 x = \log_3(\sqrt{y}+4) \\ \log_5 y = \log_3(\sqrt{z}+4) \\ \log_5 z = \log_3(\sqrt{x}+4) \end{cases}$$

Giải: Hệ phương trình không đổi qua phép hoán vị vòng quanh nên x = y = z

Từ đó ta có $\log_5 x = \log_3(\sqrt{x}+4)$

Đặt t = $\log_5 x$ ⇔ x = 5^t. Ta được phương trình

$$t=\log_3(\sqrt{5^t}+4) \Leftrightarrow \sqrt{5^t}+4=3^t \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^t+4\left(\frac{1}{3}\right)^t=1$$

Phương trình có một nghiệm t = 2 duy nhất vì hàm số f(t) = $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^t+4\left(\frac{1}{3}\right)^t$ nghịch biến trên tập R

Vậy hệ phương trình có một nghiệm x = y = z = 25

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^y=-xy-\dfrac{3}{2} & (1) \\ (x^2y+2x)^2-2x^2y+1-4x=0 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Ta có phương trình (2) ⇔ $(x^2y+2x)^2 - 2(x^2y+2x) + 1 = 0$ ⇔ $(x^2y+2x-1)^2 = 0$

⇔ $x^2y + 2x = 1$ ⇔ y = $\frac{1-2x}{x^2}$

Khi đó (1)

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^{\frac{1-2x}{x^2}}=-x\frac{1-2x}{x^2}-\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^{\frac{1-2x}{x^2}}=\frac{x^2-2x}{2x^2} \Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^{\frac{1-2x}{x^2}}=\frac{(x^2-1)+(1-2x)}{2x^2} \Leftrightarrow$$

$$2^{\frac{1-x^2}{x^2}}+\frac{1-x^2}{2x^2}=2^{\frac{1-2x}{x^2}}+\frac{1-2x}{2x^2} \Leftrightarrow f\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)=f\left(\frac{1-2x}{x^2}\right) \quad (3)$$

Với hàm số f(t) = $2^t + \frac{t}{2}$ ta có f'(t) = $2^t\ln2 + \frac{1}{2} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ => Hàm số f(t) đồng biến trên R. Do đó (3) ⇔ $\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{1-2x}{x^2}$ ⇔ x = 2

Vậy hệ phương trình có một nghiệm: x = 2, y = $-\frac{3}{4}$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} e^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+1}{y^2+1} & (1) \\ 3\log_3(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện $\begin{cases} x+2y+6>0 \\ x+y+2>0 \end{cases}$

Ta có (1) ⇔ $y^2 - x^2 = \ln(x^2+1) - \ln(y^2+1)$ ⇔ $\ln(x^2+1) + x^2 + 1 = \ln(y^2+1) + y^2 + 1$

⇔ $f(x^2+1) = f(y^2+1)$ (3)

Trong đó f(t) = lnt + t với t > 1, ta có f'(t) = $\frac{1}{t}+1>0, \forall t \in (1;+\infty)$ => Hàm số f(t) đồng biến trên khoảng (1; +∞). Từ đó (3) ⇔ $x^2 + 1 = y^2 + 1$ ⇔ x = ± y

+ Với y = - x thì (2) ⇔ $\log_3(6-x)=1$ ⇔ x = 3; y = -3 (thõa điều kiện)

+ Với y = x thì (2) ⇔ $3\log_3(3x+6) = 2\log_2(2x+2) + 1$ ⇔ $3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1)$

Đặt 3log$_3$(x + 2) = 2log$_2$(x + 1) = 6u ⇔ $\begin{cases}\log_3(x+2)=2u\\ \log_2(x+1)=3u\end{cases}$ ⇔ $\begin{cases}x+2=9^u & (4)\\ x+1=8^u & (5)\end{cases}$

Từ (4) và (5) ta được: 1 + 8^u = 9^u ⇔ $\left(\frac{1}{9}\right)^u+\left(\frac{8}{9}\right)^u=1$ (6)

Ta có hàm số g(u) = $\left(\frac{1}{9}\right)^u+\left(\frac{8}{9}\right)^u$ là hàm số nghịch biến trên R nên phương trình (6) có nghiệm duy nhất là u = 1. Suy ra 2log$_2$(x + 1) = 6 ⇔x + 1 = 8 ⇔ x = 7; y = 7 (thõa điều kiện)

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $\begin{cases}x=3\\ y=-3\end{cases};\begin{cases}x=7\\ y=7\end{cases}$

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}2^{x^2+1}-4^{8y^2+\frac{1}{2}}=3(2\sqrt{y}-\sqrt{x})\\ 2^{(x+y)^2}+\frac{3}{2}\sqrt{x+y}=\frac{7}{2}\end{cases}$$

Giải:

Điều kiện x ≥ 0 và y ≥ 0

Hệ phương trình ⇔ $\begin{cases}2^{x^2+1}+3\sqrt{x}=2^{(4y)^2+1}+3\sqrt{4y}\\ 2^{(x+y)^2+1}+3\sqrt{x+y}=7\end{cases}$ ⇔ $\begin{cases}f(x^2)=f(4y)\\ f(x+y)=f(1)\end{cases}$ (*)

Trong đó f(t) = $2^{t^2}+\sqrt{t}$ với t ≥ 0. Ta có f'(t) = 2t.2^{t^2} ln2 + $\frac{1}{2\sqrt{t}}>0,\forall t>0$ => Hàm số f đồng biến trên [1; +∞). Do đó (*) ⇔ $\begin{cases}x^2=4y\\ x+y=1\end{cases}$ ⇔ $\begin{cases}x=\frac{4}{5}\\ y=\frac{1}{5}\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm x = $\frac{4}{5}$, y = $\frac{1}{5}$

Ví dụ 6: (Đề thi tuyển sinh ĐH khối D – 2006)

Cho hệ phương trình: $\begin{cases}e^x-e^y=\ln(1+x)-\ln(1+y)\\ y-x=a\end{cases}$

Chứng minh rằng với mọi a > 0, hệ có nghiệm duy nhất

Giải:

Hệ phương trình ⇔ $\begin{cases}y=x+a\\ f(x)=e^{x+a}-e^x+\ln(1+x)-\ln(1+a+x)=0\end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất ⇔ Phương trình $f(x)=e^{x+a}-e^x+\ln(1+x)-\ln(1+a+x)=0$ có nghiệm duy nhất trên khoảng (-1; +∞)

Ta có f'(x) = $e^{a+x}-e^x+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+a+x}$

Do a>0 nên f'(x) > 0, ∀x> -1 => Hàm số f đồng biến trên khoảng (-1; +∞)

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x(e^a-1)+\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{1-x}{1+x+a}=+\infty$, còn $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$

Như vậy do tính liên tục của hàm số f suy ra phương trình f(x) = 0 có nghiệm duy nhất trên khoảng $(-1; +\infty)$

3.2/ Các biện pháp cụ thể :

***1. Hình thức luyện tập trên lớp có sự hướng dẫn của Thầy giáo**.*

Thực hiện trong phạm vi một số buổi học tự chọn. Thầy giáo giảng một số ví dụ mẫu, rồi cho bài tập tương tự để học sinh về nhà làm

2. Hình thức tự nghiên cứu các bài toán có sự hướng dẫn của thầy giáo.

Trên cơ sở làm bài tập về nhà, yêu cầu các em sưu tầm, sáng tạo ra một số bài toán có dạng tương tự.

3.3/ Khảo nghiệm tính cấp thiết và khả thi.

Qua thực tế giảng dạy học sinh khá giỏi toán, tôi nhận thấy học sinh vận dụng tốt để giải các bài toán trong các đề thi .

C. KẾT LUẬN VÀ ĐỀ NGHI

1/ Kết luận:

Sau khi tôi thực hiện dạy như trên tôi thấy học sinh có phần nào mạnh dạn, tự tin hơn khi giải toán về dạng này và ham thích tìm tòi những bài toán có cách giải hay để trao đổi với bạn bè và với Giáo viên.

2/ Đề nghị:

- Muốn học sinh nắm chắc kiến thức và vận dụng kiến thức đó để giải một số bài toán khó, thì trước hết người thầy chịu khó sưu tầm, tổng hợp một số chuyên đề để trang bị cho các em và kích thích sự tìm tòi sáng tạo ở các em.

- Học sinh phải biết vận dụng linh hoạt và hợp lý các phương pháp trên trong quá trình giải toán. Qua đó được trang bị thêm vốn kiến thức phục vụ tốt cho việc giải toán.

Cam Ranh, ngày 10 tháng 5 năm 2011

NHẬN XÉT VÀ XẾP LOẠI CỦA TỔ CHUYÊN MÔN

NGƯỜI VIẾT ĐỀ CƯƠNG

Nguyễn Nghi

BÀI TẬP

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1/ $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}+\sqrt{x+7}+\sqrt{x+16}=14$

2/ $2\sqrt{3x+1}-\dfrac{3}{\sqrt{2-x}}=3-2x$

3/ $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$

4/

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}+\sqrt{x+7}+\sqrt{x+16}=14$

2) $2\sqrt{3x+1}-\dfrac{3}{\sqrt{2-x}}=3-2x$

3) $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$

4) $\sqrt{3-x+x^2}-\sqrt{2+x-x^2}=1$

5) $\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}-\sqrt{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}=1$

6) $8^x+18^x=2.27^x$

7) $-2^{x^2-x}+2^{x-1}=(x-1)^2$

8) $25^x-2(3-x)5^x+2x-7=0$

9) $\lg(x^2-x-6)+x=\lg(x+2)+4$

10) $\log_2(1+\sqrt[3]{x})=\log_7 x$

Bài 2: Giải các bất phương trình sau

1) $\sqrt{x+9}+\sqrt{2x+4}>5$

2) $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}<35-2x$

3) $3^{\sqrt{x+4}}+2^{\sqrt{2x+4}}>13$

4) $\dfrac{3^{2-x}+3-2x}{4^x-2}\ge 0$

5) $\log_2\sqrt{x+1}+\log_3\sqrt{x+9}>1$

IV. CÁC BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Tìm m để các phương trình, bất phương trình, hệ phương trình sau có nghiệm:

1) $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^3+\dfrac{1}{x^3}+y^3+\dfrac{1}{y^3}=15m-10 \end{cases}$

2) $\sqrt[4]{x^4-13x+m}+x-1=0$ có đúng một nghiệm

3) $\sin^6 x+\cos^6 x=m.\sin 2x$

4) $\cos 3x - \cos 2x + m\cos x - 1 = 0$ có đúng 7 nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right)$

5) $\sqrt{(4+x)(6-x)} \le x^2-2x+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-4;6]$

6) $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+m}$

7) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5}=m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt

8) $\sin^4 x+\cos^4 x=m\sin 2x-\dfrac{1}{2}$ có đúng 2 nghiệm $x\in\left[\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{2}\right]$

9) Tìm m nhỏ nhất để bất phương trình sau đúng với $\forall x\in[0;1]: m(x^2-x+1)\le x^2+x+1$

2) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2009^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+2010}{y^2+2010} \\ 3\log_3(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{cases} 2009^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+2010}{y^2+2010} (1) \\ 3\log_3(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1 (2) \end{cases}$$

+) ĐK: $x + 2y + 6 > 0$ và $x + y + 2 > 0$

+) Lấy loga cơ số 2009 và đưa về pt:

$x^2+\log_{2009}(x^2+2010)=y^2+\log_{2009}(y^2+2010)$

+) Xét và CM HS $f(t)=t+\log_{2009}(t+2010), t\ge 0$ đồng biến, từ đó suy ra $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x= y, x = - y$

+) Với $x = y$ thế vào (2) và đưa về pt: $3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1) = 6t$

Đưa pt về dạng $\left(\dfrac{1}{9}\right)^t+\left(\dfrac{8}{9}\right)^t=1$, cm pt này có nghiệm duy nhất $t = 1$

$\Rightarrow x = y = 7$

+) Với $x = - y$ thế vào (2) được pt: $\log_3(y + 6) = 1 \Rightarrow y = - 3 \Rightarrow x = 3$

3/ Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases}(2x+1)[\ln(x+1) - \ln x] = (2y+1)[\ln(y+1) - \ln y] & (1)\\ \sqrt{y-1} - 2\sqrt[4]{(y+1)(x-1)} + m\sqrt{x+1} = 0 & (2)\end{cases}$$

Giải: Đặt $f(x) = (2x + 1)[\ln(x + 1) - \ln x]$ TXĐ: D = $[0;+\infty)$

$= (2x+1)\ln\dfrac{x+1}{x}$

Gọi $x_1; x_2 \in [0;+\infty)$ với $x_1 > x_2$

Ta có : $\left.\begin{matrix}2x_1+1 > 2x_2+1 > 0\\ \ln\dfrac{x_1+1}{x_1} > \ln\dfrac{x_2+1}{x_2} > 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$: $f(x)$ là hàm số tăng

Từ phương trình (1) $\Rightarrow$ x = y

(2) $\Rightarrow \sqrt{x-1} - 2\sqrt[4]{(x-1)(x+1)} + m\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - 2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} + m = 0$

Đặt $X = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ ==> $0 \le X < 1$

Vậy hệ có nghiêm khi phương trình: $X^2 - 2X + m = 0$ có nghiệm $0 \le X < 1$

Đặt $f(X) = X^2 - 2X$ == > $f'(X) = 2X - 2$

==> hệ có nghiêm $\Leftrightarrow$ $-1 < m \le 0$

Bài 3 : Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm $\begin{cases}x^2 - 7x + 6 \le 0\\ x^2 - 2(m+1)x - m + 3 \ge 0\end{cases}$

Giải: Hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2 - 7x + 6 \le 0 \ (1)\\ x^2 - 2(m+1)x - m + 3 \ge 0 \ (2)\end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow 1 \le x \le 6$. Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in [1;6]$ thỏa mãn (2).

$(2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 \ge (2x+1)m \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+3}{(2x+1)} \ge m \ (do\ x \in [1;6] \Rightarrow 2x+1 > 0)$

Gọi $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{2x+1}; x \in [1;6]$ Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \exists x_0 \in [1;6] : f(x_0) \ge m$

$f'(x) = \dfrac{2x^2+2x-8}{(2x+1)^2} = \dfrac{2(x^2+x-4)}{(2x+1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

Vì $x \in [1;6]$ nên chỉ nhận $x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ Ta có: $f(1) = \dfrac{2}{3}, f(6) = \dfrac{27}{13}, f\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right) = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$

Vì f liên tục và có đạo hàm trên [1;6] nên $\max f(x) = \dfrac{27}{13}$

Do đó $\exists x_0 \in [1;6] : f(x_0) \ge m \Leftrightarrow \max\limits_{x\in[1;6]} f(x) \ge m \Leftrightarrow \dfrac{27}{13} \ge m$

Bài 5: Giải phương trình

$$\log_{2008}\frac{4x^2+2}{x^6+x^2+1}=x^6-3x^2-1$$

Giải :

$\frac{4x^2+2}{x^6+x^2+1}=\frac{2008^{x^6+x^2+1}}{2008^{4x^2+2}}\Leftrightarrow x^6+x^2+1=4x^2+2$ vì hàm số $f(x)=x.2008^x$ tăng trên R

Giải phương trình $x^6-3x^2-1=0\Leftrightarrow u^3-3u-1\quad u\geq 0$ phương trình chỉ có nghiệm trong (0,2)

Đặt $u=2\cos t\quad 0<t<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos 3t=\frac{1}{2}$

Suy ra phương trình có nghiệm $x=\pm\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}$

II/ Tìm điều kiện của tham số để phương trình có k nghiệm

Ví dụ 1: (Đề thi tuyển sinh ĐH khối B – 2006)

Cho phương trình: $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1\geq 0\\ x^2+mx+2=4x^2+4x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq-\frac{1}{2}\\ 3x^2+4x-1=m(*)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq-\frac{1}{2}\\ f(x)=\frac{3x^2+4x-1}{x}=m\end{cases}$

(Vì x = 0 không là nghiệm phương trình (*))

Ta có $f'(x)=\frac{3x^2+1}{x^2}$, nên có bảng biến thiên sau:

t	$-\infty$	$-1/2$		0		$+\infty$
f'(t)			+	||	+	
f(t)		$9/2$	$\nearrow +\infty$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra m ≥ $\frac{9}{2}$ là các giá trị cần tìm

Nhận xét: Nếu ta tìm điều kiện để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\geq-\frac{1}{2}$ theo định lí so sánh một số với hai nghiệm của phương trình bậc hai thì không phù hợp chương trình

Ví dụ 2: (Đề thi tuyển sinh ĐH khối A – 2007)

Cho phương trình $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$

Tìm m để phương trình có nghiệm

Giải: ĐK: x ≥ 1

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$

Đặt t = $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4]{1-\frac{2}{x+1}}$. Điều kiện 0 ≤ t < 1

Bài toán trở thành tìm m để hệ $\begin{cases}f(t)=-3t^2+2t=m\\ 0\leq t<1\end{cases}$ có nghiệm

Ta có f'(t) = - 6t + 2 và có bảng biến thiên

t	$-\infty$	0		$1/3$		1	$+\infty$
$f'(t)$			$+$	0	$-$		
$f(t)$		0	$\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	-1	

Từ đó suy ra -1 < m $\le \frac{1}{3}$

Ví dụ 3: (Đề thi tuyển sinh ĐH khối B – 2007)

Cho phương trình $x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x-2)}$ (1)

Chứng minh rằng với mọi m > 0, phương trình luôn có hai nghiệm thực

Giải:

Ta có với m > 0, phương trình $\Leftrightarrow (x-2)(x+4) = \sqrt{m(x-2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ (x-2)^2(x+4)^2 = m(x-2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ (x-2)^2(x+4)^2 = m(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ (x-2)(x^3+6x^2-32-m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \begin{cases} x > 2 \\ f(x) = x^3+6x^2-32 = m \end{cases} \end{array} \right.$$

Ta có f'(x) = $3x^2$ + 12x > 0, $\forall x$>2, nên ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$	2		$+\infty$
$f'(t)$			$+$	
$f(t)$		0	$\nearrow$	$+\infty$

Do f(2) = 0, nên từ BBT suy ra với m > 0, phương trình f(x) = m luôn luôn có 1 nghiệm.

Vậy với m > 0, phương trình (1) luôn luôn có 2 nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 \in (2;+\infty)$

Ví dụ 4: (Đề thi tuyển sinh ĐH khối B – 2004)

Cho phương trình: $m\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2\right) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ (1)

Tìm m để (1) có nghiệm

Giải:

Đặt t = $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$. Điều kiện t $\ge$ 0

Suy ra $t^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^4} \le 2$, vậy $0 \le t \le \sqrt{2}$

Ta cũng có $2\sqrt{1-x^4} = 2 - t^2$. Khi đó phương trình (1) trở thành $m(t + 2) = -t^2 + t + 2$

$\Leftrightarrow f(t) = \dfrac{-t^2+t+2}{t+2} = m$ (2)

Bài toán trở thành tìm m để phương trình (2) có ít nhất một nghiệm $t \in [0;\sqrt{2}]$

Ta có f'(t) = $\dfrac{-t^2-4t}{(t+2)^2}$ và có bảng biến thiên

t	$-\infty$	0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(t)$			$-$		
$f(t)$		1	$\searrow$	$\sqrt{2}-1$	

Vậy $\sqrt{2} - 1 \le m \le 1$

Ví dụ 5: (Đề thi tuyển sinh ĐH khối A – 2002)

Cho phương trình: $\log_2^3 x + \sqrt{\log_2^3 x + 1} - 2m - 1 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$

Giải:

Đặt t = $\sqrt{\log_2^3 x + 1}$, với x$\in \left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$ thì $1 \le t \le 2$

Phương trình (1) trở thành: $t^2 + t - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow f(t) = t^2 + t - 2 = 2m$ (2)

Bài toán trở thành: Tìm m để phương trình (2) có nghiệm $t \in [1; 2]$

Ta có f'(t) = 2t + 1 và có bảng biến thiên

t	-∞	-1/2	1		2	+∞
f'(t)				+		
f(t)			0	↗	4	

Từ BBT ta được $0 \le 2m \le 4 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2$

Ví dụ 6: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2-2x+4} = m$

Giải:

TXĐ: D = R

Xét hàm số f(x) = $\sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2-2x+4}$ trên tập R

Ta có: $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}} - \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}} - \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}} = 0 \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x^2-2x+4} = (x-1)\sqrt{x^2+2x+4}$ (*)

$\Rightarrow (x+1)^2(x^2-2x+4) = (x-1)^2(x^2+2x+4) \Leftrightarrow$ x = 0

Thay x = 0 vào (*) không thõa $\Rightarrow$ f'(x) = 0 vô nghiệm $\Rightarrow$ f'(x) không đổi dấu trên R.

Mà f'(0) = 1 > 0, suy ra f'(x) > 0, $\forall x \in \mathbb{R}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2-2x+4}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-2x+4}} =$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}} = 2$$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-2x+4}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}} = -2$

Ta có BBT của hàm số f(x)

x	-∞		+∞
f'(x)		+	
f(x)	-2	↗	2

Dựa vào BBT ta có: Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số y = f(x) và đường thẳng y = m có giao điểm trên R $\Leftrightarrow$ -2 < m < 2

Ví dụ 7: Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x}+\sqrt{(1+x)(8-x)}=m \quad (1)$$

Giải:

Điều kiện: $-1 \le x \le 8$

Đặt t = $\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x}$. Ta có t' = $\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{8-x}}$ với $-1 < x < 8$

Ta có t' = 0 $\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{8-x}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 8 \\ \sqrt{1+x}=\sqrt{8-x} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$

Bảng biến thiên

x	-1		$\frac{7}{2}$		8
t'		+	0	-	
t	3	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	3

Từ BBT ta được $3 \le t \le 3\sqrt{2}$

Ta có t = $\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x}\right)^2=t^2 \Leftrightarrow \sqrt{(1+x)(8-x)}=\frac{t^2-9}{2}$

Phương trình (1) trở thành : $t+\frac{t^2-9}{2}=m \Leftrightarrow$ f(t) = $t^2 + 2t - 9 = 2m$

Ta có f'(t) = 2t + 2 > 0, $\forall t \in [3;3\sqrt{2}]$. Ta có BBT

t	3	$\frac{7}{2}$	$3\sqrt{2}$
f'(t)		+	
f(t)	6	$\nearrow$	$9+6\sqrt{2}$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số y = f(t) và đường thẳng y = 2m trên đoạn $[3;3\sqrt{2}]$. Dựa vào BBT ta suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 6 \le 2m \le 9+6\sqrt{2} \Leftrightarrow 3 \le m \le \frac{9+6\sqrt{2}}{2}$

II/ Tìm điều kiện của tham số để bất phương trình có nghiệm

Ví dụ 1: Tìm m để bất phương trình $m\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x)\le 0$ (1) có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;1+\sqrt{3}\right]$

Giải:

Đặt t = $\sqrt{x^2-2x+2} \Rightarrow -x(x-2)=t^2-2$

Ta có t' = $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, t' = 0 $\Leftrightarrow$ x = 1. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		1		$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
t'			-	0	+		
t		$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	

Từ BBT ta có $1 \le t \le 2$

Khi đó bất phương trình (1) trở thành: $m(t+1) \le t^2 - 2 \Leftrightarrow m \le \frac{t^2-2}{t+1}$ = f(t)

Ta có f'(t) = $\dfrac{t^2+2t+2}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [1;2]$. Ta có bảng biến thiên của f(t)

t	$-\infty$	1		2	$+\infty$
f'(t)			+		
f(t)		$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	

Bất phương trình (1) có nghiệm x $\in \left[0; 1+\sqrt{3}\right]$ $\Leftrightarrow$ Bất phương trình (2) có nghiệm

t$\in [1;\ 2]$ $\Leftrightarrow$ m $\le \underset{[1;2]}{Max}\, f(t) = f(2) = \dfrac{2}{3}$

Ví dụ 2: Tìm các giá trị của m để bất phương trình sau có nghiệm:

$$mx - \sqrt{x-3} \le m+1 \ (1)$$

Giải:

Đặt t = $\sqrt{x-3} \ge 0$ ta được x = $t^2 + 3$

Bất phương trình (1) trở thành m(t^2 + 3) – t ≤ m + 1 ⇔m(t^2 + 2) ≤ t + 1

⇔ $m \le \dfrac{t+1}{t^2+2} = f(t)$ (2)

Ta có f'(t) = $\dfrac{-t^2-2t+2}{(t+1)^2}$, f'(t) = 0 ⇔ t = $-1 \pm \sqrt{3}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{t+1}{t^2+2} = 0$

BBT

t		0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(t)			+	0	-	
f(t)		$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$	$\searrow$	0

Ta có bất phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình (2) có nghiệm

t$\in [0;\ +\infty)$ $\Leftrightarrow m \le \underset{[0;+\infty)}{Max}\, f(t) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

Vậy với $m \le \dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$ thì bất phương trình (1) có nghiệm

II/ Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình có nghiệm

Ví dụ 1: (Đề thi tuyển sinh ĐH khối D – 2007)

Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^2 + \dfrac{1}{x^3} + y^3 + \dfrac{1}{y^3} = 15m - 10 \end{cases}$ (1)

Giải: Đặt $u = x + \dfrac{1}{x}, v = y + \dfrac{1}{y}$, khi đó |u|≥2; |v|≥2

Ta lại có $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=u^3-3u$, tương tự $y^3+\dfrac{1}{y^3}=v^3-3v$

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases}u+v=5\\ u^3+v^3-3(u+v)=15m-10\\ |u|\geq 2,|v|\geq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=5\\ uv=8-m\\ |u|\geq 2,|v|\geq 2\end{cases}$ (2)

Từ đó suy ra hệ (1) và (2) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình f(t) = t^2 – 5t + 8 – m = 0, có cả hai nghiệm t đều thõa |t|≥2

Ta có f'(t) = 2t – 5 và có bảng biến thiên:

t	-∞		-2		2		5/2		+∞
f'(t)		-				-	0	+	
f(t)	+∞	↘ 22			2	↘	7/4	↗	+∞

Vậy các giá trị cần tìm của m là m ≥ 22 hoặc $\frac{7}{4}\leq m\leq 2$

Ví dụ 3: Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm $\begin{cases}x^2-3x-4\leq 0\\ x^3-3|x|x-m^2-15m\geq 0\end{cases}$

Giải:

Ta có: x^2 – 3x – 4 ≤ 0 ⇔ -1 ≤ x ≤ 4

Hệ bất phương trình đã cho có nghiệm ⇔ $x^3-3|x|x-m^2-15m\geq 0$ có nghiệm x∈[-1; 4]

⇔ $x^3-3|x|x\geq m^2+15m$ có nghiệm x∈[-1; 4]

Đặt f(x) = x^3 – 3|x|x = $\begin{cases}x^3+3x^2 & khi -1\leq x<0\\ x^3-3x^2 & khi\, 0\leq x\leq 4\end{cases}$

Ta có f'(x) = $\begin{cases}3x^2+6x & khi -1<x<0\\ 3x^2-6x & khi\, 0<x<4\end{cases}$

f'(x) = 0 ⇔ $x=2$, f'(x) không xác định ⇔ x = 0

Ta có bảng biến thiên

x	-1		0		2		4
f'(x)		-	||	-	0	+	
f(x)	2	↘			-4	↗	16

Từ BBT ta có f(x) ≥ m^2 + 15m có nghiệm x∈[-1; 4] ⇔ $\underset{[-1;4]}{Max}\, f(x)\geq$ m^2 + 15m ⇔ 16 ≥ m^2 + 15m ⇔ m^2 + 15m -16 ≤ 0 ⇔ -16 ≤ m ≤ 1

Vậy hệ bất phương trình đã cho có nghiệm ⇔ -16 ≤ m ≤ 1

Ví dụ 4:

Tìm *m* để hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-y^3+3y^2-3x-2=0\\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+m=0\end{cases}$ có nghiệm thực.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 2y-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

Đặt $t = x + 1 \Rightarrow t \in [0; 2]$; ta có (1) $\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 = y^3 - 3y^2$ (1)

Hàm số $f(u) = u^3 - 3u^2$ nghịch biến trên đoạn [0; 2] nên:

(1) $\Leftrightarrow y = \mathrm{t} \Leftrightarrow y = x + 1 \Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + m = 0$

Đặt $v = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow v \in [0; 1] \Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow v^2 + 2v - 1 = m$.

Hàm số $g(v) = v^2 + 2v - 1$ đạt $\min\limits_{[0;1]} \mathrm{g(v)} = -1; \quad \max\limits_{[0;1]} \mathrm{g(v)} = 2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 2$